



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

**Fakultät Physik**

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **SR**

Aktualisiert: am 08.04.2021

# Strömung im Rohr

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2 Allgemeine Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1 Ideale Flüssigkeit . . . . .	2
2.2 Reale Flüssigkeit . . . . .	2
2.2.1 Innere Reibung, Viskosität, laminare Strömung . . . . .	2
2.2.2 Turbulente Strömung . . . . .	3
2.2.3 Reynoldssche Zahl und Widerstandsbeiwert . . . . .	3
<b>3 Experimente</b>	<b>4</b>
3.1 Meßanordnung . . . . .	4
3.2 Grafische Darstellung . . . . .	4
<b>4 Anhang</b>	<b>4</b>
4.1 Zur Reynoldsschen Zahl . . . . .	4
4.2 Zum Gesetz von Hagen-Poiseuille . . . . .	5
<b>Fragen</b>	<b>6</b>
<b>Literatur</b>	<b>6</b>

## 1 Aufgabenstellung

1. Messen Sie den Druckabfall (indirekt über  $\Delta h$ ) als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit von Wasser in einem horizontalen Rohr.
2. Berechnen Sie die Widerstandsbeiwerte ( $c_w$ ) und Reynoldsen Zahlen ( $Re$ ) im laminaren und turbulenten Gebiet, tragen Sie  $c_w$  über  $Re$  doppelt logarithmisch auf und vergleichen Sie mit den theoretischen Werten.
3. Bestimmen Sie die kritische Reynoldszahl  $Re_{krit}$ , diskutieren Sie das Ergebnis.
4. Führen Sie die Fehlerbetrachtung für  $c_w$  und  $Re$  für zwei weit auseinanderliegende Punkte des Diagramms durch.
5. Zusatz: Geben Sie die statistischen und systematischen Unsicherheiten aller Messpunkte als Fehlerbalken bzw. als Fehlerschlauch an.

## 2 Allgemeine Grundlagen

### 2.1 Ideale Flüssigkeit

In einer divergenzfreien (z.B. Rohr-) Strömung gilt für konstante Dichte (Inkompressibilität) die *Kontinuitätsgleichung* (es seien  $A_1$  bzw.  $A_2$  Querschnitte und  $v_1$  bzw.  $v_2$  Strömungsgeschwindigkeiten an verschiedenen Orten):

$$\frac{V}{t} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2. \quad (1)$$

Einen Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Druck stellt die *Bernoullische Gleichung* her. Für vernachlässigbare Reibung lautet sie:

$$\frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 + \rho g \cdot h_1 = \frac{\rho}{2}v_2^2 + p_2 + \rho g \cdot h_2 = \text{konstant.} \quad (2)$$

Es seien hierbei  $p_1$  bzw.  $p_2$  die statischen Drücke der in den Höhen  $h_1$  bzw.  $h_2$  mit den jeweiligen Geschwindigkeiten strömenden Flüssigkeit der Dichte  $\rho$ . Die Bernoullische Gleichung beschreibt die Erhaltung des Gesamtdruckes als Folge des auf ein Volumenelement bezogenen Energieerhaltungssatzes.

### 2.2 Reale Flüssigkeit

#### 2.2.1 Innere Reibung, Viskosität, laminare Strömung

In realen Flüssigkeiten ist die Erhaltung des Gesamtdruckes (2) nicht mehr gegeben. Vielmehr treten Druckverluste (Druckabfälle) infolge der inneren Reibung auf. Bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten (*laminare Strömung*) gilt für die Reibungskraft der *Newtonsche Ansatz*: Im laminaren Fall bilden sich Flüssigkeitsschichten ( $xy$ -Ebene) mit unterschiedlicher Geschwindigkeit  $\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x$ , welchen aneinander abgleiten. Dabei üben sie Scherkräfte aufeinander aus:

$$F_x = \eta \cdot A \cdot \frac{dv_x}{dz}. \quad (3)$$

$\eta$  ist die *Viskosität* oder *Zähigkeit*,  $A$  die Fläche und  $\frac{dv_x}{dz}$  der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zu den Flüssigkeitsschichten. Für eine *Rohrströmung* folgt aus (3) das Gesetz von *Hagen-Poiseuille* bzw. die zugehörige Druckkraft:

$$A \cdot \bar{v} = \frac{V}{t} = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8\eta \cdot l} \quad (4a)$$

$$F_p = \pi \cdot \Delta p \cdot R^2 = 8\pi \cdot \eta l \cdot \bar{v} \quad (4b)$$

Dabei sind  $A$  der Rohrquerschnitt,  $V$  das Volumen,  $R$  der Rohrradius,  $l$  die Rohrlänge und  $\Delta p$  der durch die Reibung bewirkte Druckabfall.  $\bar{v}$  beschreibt die über den Rohrquerschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit.

### 2.2.2 Turbulente Strömung

Durch Wirbelbildung infolge der Reibung geht die laminare Strömung oberhalb einer kritischen Geschwindigkeit  $v_{\text{krit}}$  in eine turbulente über. Oberhalb von  $v_{\text{krit}}$  ist  $v$  nicht mehr zu  $\Delta p$  proportional, sondern wächst langsamer an. Die lokalen Werte von  $v$  und  $p$  schwanken scheinbar regellos um ihre Mittelwerte. Die Bahnlinien einzelner Volumenelemente sind nicht mehr näherungsweise geradlinig, es findet eine starke Durchmischung statt. Mit  $A^*$  als Querschnitt eines umströmten Körpers wird für die Reibungskraft allgemein angesetzt

$$F_r = c_w \cdot A^* \frac{\rho}{2} \cdot \bar{v}^2 \quad \text{oder} \quad \frac{F_r}{A^*} = \Delta p = c_w \frac{\rho}{2} \cdot \bar{v}^2. \quad (5)$$

Hierbei sind  $c_w$  der Widerstandsbeiwert und  $\frac{\rho}{2} \cdot \bar{v}^2$  der Staudruck.

Liegt an einem *rauhwandigen Rohr* mit dem Durchmesser  $d$  und der Länge  $l$  die Druckdifferenz  $\Delta p$  an, so ist die für die Reibung maßgebliche Fläche  $A^* = \pi \cdot dl$  (Rohrmantel) und die Reibungskraft  $F_r$  genügt mit (5) der Beziehung:

$$F_r = A^* \cdot \Delta p = \pi dl \cdot \Delta p = \pi dl \cdot c_w \frac{\rho}{2} \cdot v^2. \quad (6)$$

### 2.2.3 Reynoldssche Zahl und Widerstandsbeiwert

**Ähnlichkeit:** Verschiedene Strömungen sind ähnlich, wenn die Verhältnisse ihrer kinetischen Energien  $\frac{1}{2}Al \cdot \rho v^2$  denen der Reibungsarbeiten  $lA^* \cdot \eta dv/dr$  entsprechen oder wenn ihre dimensionslosen *Reynoldsschen Zahlen* gleich sind.

**Reynoldssche Zahl  $Re$ :**  $l^*$  ist eine charakteristische Länge, für ein Rohr gilt  $l^* = d$ :

$$Re = \frac{\rho v \cdot l^*}{\eta} \quad (\text{allgemein}) \quad \text{bzw.} \quad Re = \frac{\rho v \cdot d}{\eta} \quad (\text{Rohr}) \quad . \quad (7)$$

Der sprunghafte Übergang von der laminaren zur turbulenten Rohr-Strömung erfolgt etwa bei  $Re_{\text{krit}} \approx 2000$ . Kombiniert man (6) und (4b) (im Grenzfall sicher erlaubt), so folgt im laminaren Fall aus (7):

$$8\pi \cdot \eta l \cdot \bar{v} = \pi c_{\text{lam}} \frac{\rho}{2} \cdot v^2 dl$$

$$c_{\text{lam}} = \frac{16}{Re}. \quad (8)$$

Für den turbulenten Fall findet man empirisch:

$$c_{\text{turb}} \approx \frac{0,079}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (9)$$

### 3 Experimente

#### 3.1 Meßanordnung

Über einen Druckminderer wird Leitungswasser mit variabler Geschwindigkeit einem langen horizontalen Rohr zugeführt – *ausgebildete Strömung*. An zwei im Abstand  $l$  angebrachten Messpunkten wird anhand von Steigrohren der statische Druck gemessen und die Druckdifferenz  $\Delta p$  ermittelt.

Bei bekanntem Rohrdurchmesser wird die Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{v}$  aus dem in der Zeit  $t$  ausgeflossenen Volumen  $V$  bestimmt (siehe Abb. 1).

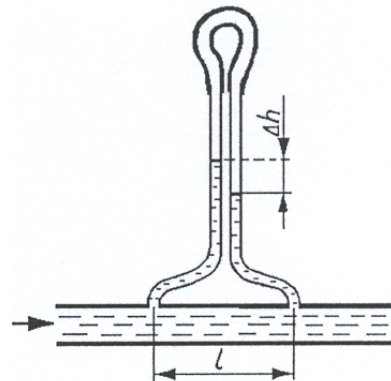


Abb. 1: Schema der Versuchsanordnung

#### 3.2 Grafische Darstellung

Man führt anhand der Gleichungen (1),(5) und (6) den Widerstandsbeiwert  $c_w$  auf Messgrößen zurück und erhält mit  $d = 2R$ ,  $A = \pi R^2$ ,  $A^* = 2\pi \cdot lR$  und  $F_r = F_p$  :

$$c_w = \frac{2F_p}{\rho \cdot v^2 \cdot A^*} = \frac{2\pi \cdot \Delta p \cdot R^2}{\rho \cdot \left(\frac{V}{tA}\right)^2 \cdot A^*} = \frac{\pi^2 \cdot R^5}{\rho \cdot l} \cdot \frac{\Delta p}{\left(\frac{V}{t}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot R^5 \cdot g}{l} \cdot \frac{\Delta h}{\left(\frac{V}{t}\right)^2} = K_c \cdot \frac{\Delta h}{\left(\frac{V}{t}\right)^2} \tag{10}$$

Ebenso lässt sich ausgehend von Gleichung (7) die Reynolds-Zahl durch Messgrößen ausdrücken:

$$Re = \frac{2R \cdot \rho}{A \cdot \eta} \cdot \frac{V}{t} = \frac{2}{\pi R \cdot \frac{\eta}{\rho}} \cdot \frac{V}{t} = \frac{K_{Re} \cdot \rho}{\eta} \cdot \frac{V}{t} \tag{11}$$

Trägt man im doppelt logarithmischen Maßstab  $c$  über  $Re$  auf, so erhält man Geraden mit unterschiedlichen Steigungen, die dem laminaren bzw. turbulenten Gebiet entsprechen (8) und (9). Am Knick (Unstetigkeits-Punkt, *Keimbildung*) lässt sich der kritische Wert der Reynolds-Zahl ablesen.

## 4 Anhang

#### 4.1 Zur Reynoldsen Zahl

Man betrachte zwei durchströmte Rohre mit dem Durchmesser-Verhältnis  $d_1/d_2 = \alpha$ . Im gleichen Ähnlichkeits-Verhältnis stehen die entsprechenden Wege im Ausdruck für die Reibungsarbeiten. ( $s_1/s_2 = d_1/d_2 = \alpha$ ). Damit lassen sich die Quotienten aus kinetischer Energie bzw. Reibungsarbeit umformen [4]:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \alpha^3 \quad \text{und} \quad \frac{A_1}{A_2} = \alpha^2 \quad \text{und} \quad \frac{dv_1/dr}{dv_2/dr} = \frac{v_1/d_1}{v_2/d_2}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{A_1 \cdot \eta_1 s_1 \cdot dv_1/dr}{A_2 \cdot \eta_2 s_2 \cdot dv_2/dr}$$

$$\frac{\rho_1 \alpha^3 v_1^2}{\rho_2 v_2^2} = \alpha^2 \frac{\eta_1 v_1 d_2}{\eta_2 v_2 d_1} \cdot \alpha$$

$$\frac{\rho_1 v_1 d_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 d_2}{\eta_2}$$

$$Re_1 = Re_2.$$

$Re$  hängt ab von  $v$ , der kinematischen Zähigkeit  $\eta/\rho$  und einer charakteristischen Länge  $l^*$ : z. B. Rohrdurchmesser  $l^* = 2R = d$ .

### 4.2 Zum Gesetz von Hagen-Poiseuille

Am koaxialen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius  $R$  und der Länge  $l$  greifen am Mantel die Reibungskraft (12) und an der Stirnfläche die Druckkraft (13) an.

$$F_r = 2\pi r \cdot l \eta \cdot \frac{dv}{dr} = A^* \eta \cdot \frac{dv}{dr} \quad \text{mit } \frac{dv}{dr} < 0 \quad (12)$$

$$F_p = \pi r^2 \cdot \Delta p = A \cdot \Delta p. \quad (13)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung  $F_r = F_p$  folgt nach einer Integration zunächst das parabelförmige  $\vec{v}(\vec{r})$ -Profil [1]:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta \cdot l} r \quad (14)$$

$$v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot r^2 \quad \text{mit } v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot R^2. \quad (15)$$

Betrachtet man weiter das zwischen zwei Schichten mit den Radien  $r$  und  $r + dr$  strömende Volumen  $d^2V = 2\pi r dr ds$  bzw. dessen zeitliche Änderung  $\frac{dV}{dt} = 2\pi r \cdot v(r) dr$ , so ergibt eine Integration über den ganzen Querschnitt

$$\frac{V}{t} = \int_0^R 2\pi r \cdot v(r) dr = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta \cdot l} \cdot R^4.$$

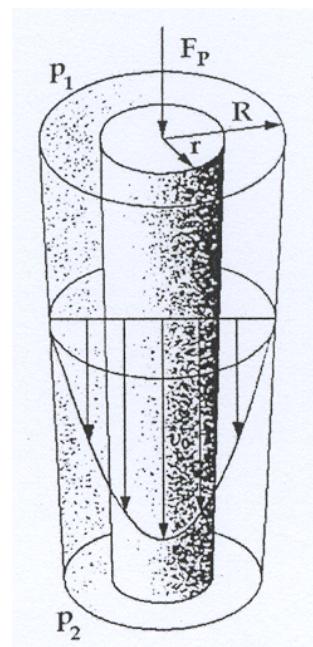


Abb. 2: Laminare Rohrströmung

### Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von L. Jahn erstellt und von M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke, und S. Majewsky bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

## Fragen

1. Was versteht man unter einer laminaren und einer turbulenten Strömung?
2. Wie berechnet sich der Strömungswiderstand in einer laminaren und in einer turbulenten Rohr-Strömung?
3. Wie lautet der Zusammenhang zwischen  $v$  und  $\Delta p$  beim sehr kurzen Rohr (Ausfluß)?
4. Wie unterscheiden sich Ursache und Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen?
5. Wie ist die Reynoldssche Zahl definiert? Was besagt ihr kritischer Wert?
6. Was versteht man unter Kavitation?
7. Was versteht man unter dem hydrostatischen und dem hydrodynamischen Paradoxon?
8. Unter welcher Voraussetzung kann man Gasströmungen als inkompressibel ansehen?
9. Wie lauten die Bernoullische und die Kontinuitäts-Gleichung?

## Literatur

- [1] C. Gerthsen, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1995
- [2] F. Kohlrausch, *Praktische Physik, Band 2*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1996
- [3] H. Niedrig, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1992
- [4] H. J. Paus, *Physik in Experimenten und Beispielen*, Verlag C.-Hanser, München 1995
- [5] A. Recknagel, *Physik: Mechanik*, Technik-Verlag, Berlin 1990
- [6] A. Recknagel, *Physik: Schwingungen, Wellen, Wärmelehre*, Technik-Verlag, Berlin 1990
- [7] H. Stroppe, *Physik*, Fachbuch-Verlag, Leipzig 1984