Technische Universität Dresden Fachrichtung Physik Grundpraktikum Physik	Versuch TR **Transformator** V11/2011 R. Schwierz

Transformator

Transformatoren werden in vielen Bereichen der Elektrotechnik und Elektronik eingesetzt. Für die Elektroenergieübertragung vom Erzeuger zum Endverbraucher ist die Transformation zu hohen Spannungen von entscheidender Bedeutung.
Betrachten Sie beispielsweise die Verlustleistung P_V bei der Energieübertragung aus einer Spannungsquelle U über eine Einphasen-Wechselstrom-Übertragungsleitung mit dem Ohmschen Widerstand R und dem *Strom I* $P_V = I^2 \cdot R$
und die am Verbraucher umgesetzte Leistung $P = U \cdot I \cdot \cos\phi$,
so folgt aus beiden Gleichungen $P_V = (P^2 \cdot R)/(U \cdot \cos\phi)^2$.
Die Übertragungsverluste werden also mit steigender Übertragungsspannung kleiner. Transformatoren finden auch bei der Bereitstellung unterschiedlichster Spannungen, großer Ströme und zur Impedanzanpassung vielfältige Einsatzgebiete. Ziel des Versuches ist es, die grundlegenden Eigenschaften der Spannungs-, Strom- und Widerstandstransformation und die Verluste am Transformator kennenzulernen.

Grundlagen

1. *Der ideale unbelastete Transformator*

Der ideale Transformator ist eine Anordnung zweier Spulen die sich so auf einem gemeinsamen Eisenkern befinden, dass der im Inneren der Primärspule mit der Windungszahl n_1 entstehende magnetische Fluss Φ vollständig durch das Innere der Sekundärspule mit der Windungszahl n_2 verläuft. Energieverluste durch Wirbelströme, der ohmsche Widerstand der Windungen und das Hystereseverhalten des Eisenkerns werden vernachlässigt. Die Permeabilität (μ_r) des Trafokerns ist konstant.

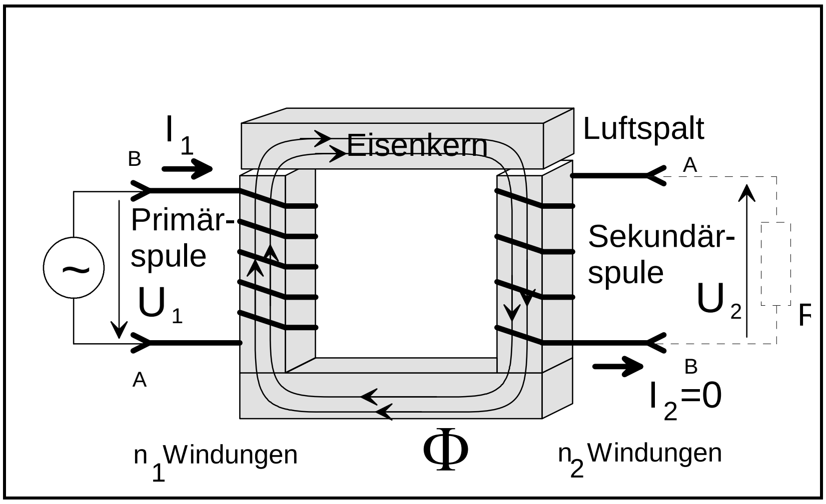


Abb. 1: Prinzipdarstellung Transformator

An die Primärspule wird eine harmonische Wechselspannung $U_1 = U_{10} \sin\omega t$ angelegt. Nach dem Induktionsgesetz ruft die zeitliche Änderung eines magnetischen Flusses Φ in einer Leiterschleife eine Induktionsspannung hervor: $U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi$.
Unter Beachtung der Windungszahl n_1 der Primärspule muss also gelten

$$U_1 = U_{1,ind} = -n_1 \frac{d}{dt}\Phi = -L_1 \frac{d}{dt} I_1 \qquad (L_1 \text{..Selbstinduktivität der Primärspule}) \qquad (1)$$

so dass durch die angelegte Spannung U_1 sowohl der magnetische Fluss Φ als auch der Magnetisierungsstrom in der Primärspule $I_1 = I_{10}\sin(\omega t - \varphi)$ festgelegt sind. Durch diesen Magnetisierungsstrom baut sich innerhalb der Spule ein B-Feld auf, das idealisiert homogen im Eisenkern und senkrecht zu dessen Querschnittsfläche A verläuft und sich so mit der Länge des Kerns l_{Kern}, die dann gleich der Länge der Magnetfeldlinien im Kern ist, berechnen lässt

$$\oint \vec{B}\,d\vec{r} \approx B \cdot l_{Kern} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot I_1 \;\Rightarrow\; B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot n_1 \cdot I_1}{l_{Kern}} \qquad (2a)$$

Das B-Feld senkrecht durch die Querschnittsfläche A des Eisenkerns ist mit dem magnetischen Fluss Φ verbunden:

$$\Phi = \int \vec{B}\,d\vec{A} \approx B \cdot A \;. \qquad (2b)$$

Bei Beachtung der Windungszahl n_2 der Sekundärspule und der oben gemachten Annahme, dass der Fluss Φ die Primär- und Sekundärspule in gleicher Größe und Richtung durchsetzt, gilt für die an den Klemmen der Sekundärspule messbare Spannung und die Definition der Gegeninduktivität M_{12}

$$U_2 = U_{2,ind} = -n_2 \frac{d}{dt}\Phi = -M_{12} \frac{d}{dt} I_1 \qquad (3)$$

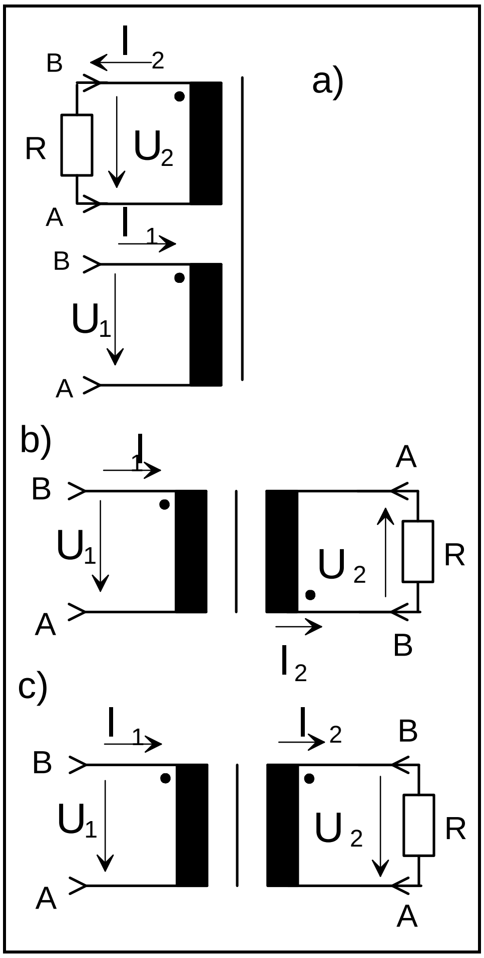


Abb. 2: Definition der messbaren Spannungen und Ströme bei gleichem Windungssinn und jeweils durch den Punkt bestimmten Windungsanfang

Für das Übersetzungsverhältnis bei einem idealen unbelasteten Transformator folgt also bei gleichem Fluss Φ in Primär und Sekundärspule $\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}$ (4)

Bei gleichem Windungssinn und jeweils bezogen auf Windungsanfang zu Windungsende sind die in der Primär- und Sekundärspule induzierten Spannungen gleichphasig und damit auch die jeweils von Punkt A zu Punkt B zu einem festen Zeitpunkt messbaren Spannungen U_1 und U_2. Am idealen unbelasteten Transformator folgt aber auch, dass die o.g. harmonische Wechselspannung U_1 und der daraus folgende Strom I_1 um 90^0 phasenverschoben sind (siehe Anhang B).

2. Der ideale belastete Transformator

In diesem Fall nehmen wir an, dass die Last durch einen im Sekundärkreis geschalteten rein ohmschen Widerstand R gebildet wird. Zwischen Strom und Spannung über einem ohmschen Widerstand gibt es keine Phasenverschiebung, Sekundärspannung U_2 und der Strom I_2 über dem Widerstand R sind in Phase. Die beim idealen unbelasteten Transformator gemachten Vereinfachungen gelten weiterhin. Der Sekundärstrom I_2 erzeugt gegenüber dem unbelasteten Fall einen zusätzlichen magnetischen Fluss Φ_2. Dieser Fluss ist nach der Lenzschen Regel dem Fluss Φ_1, der durch den Strom I_1 in der Primärspule hervorgerufen wird, entgegengerichtet. Da aber durch die festgelegte Primärspannung der gesamte Fluss Φ bestimmt ist, muss Φ_1 und damit I_1 größer werden. Damit ergeben sich die sog. Trafogleichungen, wobei die im nebenstehenden Bild eingezeichneten Pfeile die Richtungen der Spannungen und Ströme zu einem festen Zeitpunkt bei unterschiedlichen Anordnungen der Windungen kennzeichnen. Die Spannungen in den nachfolgenden Gleichungen werden also jeweils vom Anschluss A (Bezugspotential) nach B und die Ströme in Pfeilrichtung angeben.

Für harmonische Spannungverläufe gilt dann

in differentieller Form und in komplexer Form ($j^2 = -1$, siehe auch Anhang)

$$U_1 - L_1 \frac{d}{dt} I_1 + M \frac{d}{dt} I_2 = 0 \qquad \overrightarrow{U_1} - j\omega L_1 \overrightarrow{I_1} + j\omega M \overrightarrow{I_2} = 0 \tag{5a}$$

$$U_2 - M \frac{d}{dt} I_1 + L_2 \frac{d}{dt} I_2 = 0 \qquad \overrightarrow{U_2} - j\omega M \overrightarrow{I_1} + j\omega L_2 \overrightarrow{I_2} = 0 \tag{5b}$$

$$U_2 - \qquad R\, I_2 = 0 \qquad \overrightarrow{U_2} - \qquad R\, \overrightarrow{I_2} = 0 \tag{5c}$$

Die nur von der Geometrie und dem Material abhängigen Induktionskoeffizienten L_1, L_2 und M sind zeitlich konstant und unabhängig vom jeweils fließenden Strom, damit sind Sättigungseffekte am idealen Transformator ausgeschlossen und es gilt hier ebenfalls

$$M^2 = L_1 L_2 \tag{6}$$

Für den in 1. behandelten Spezialfall des idealen unbelasteten Transformators folgt mit $I_2 = 0$ und (5b)/(5a) für das Spannungsübersetzungsverhältnis

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{7}$$

und mit der Kenntnis für die Induktivität einer Spule $L \backsim n^2$, die schon bekannte Gleichung (4).

Der Zusammenhang zwischen den Strömen im Primär- und Sekundärkreis wird ebenfalls aus den Trafogleichungen sichtbar. Gleichung (5b) umgestellt liefert

$$\overrightarrow{I_1} = \frac{1}{j\omega M}(\overrightarrow{U_2} + j\omega L_2 \overrightarrow{I_2}) \tag{8a}$$

und mit $\overrightarrow{U_2} = R\overrightarrow{I_2}$ wird $\overrightarrow{I_1} = \frac{\overrightarrow{I_2}}{j\omega M}(R + j\omega L_2)$ (8b)

so dass im Spezialfall des sekundärseitigem Kurzschlusses für das Verhältnis der Ströme folgt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{M} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{9}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Induktivitäten am idealen Transformator lassen sich ebenfalls aus den Trafogleichungen ableiten. Für den Leerlauf (*$I_2 = 0$*) liefern die Gleichung (5a) und (5b) nach Betragsbildung

$$L_1 = \frac{U_{1,leer}}{\omega \cdot I_{1,leer}} \quad \text{(10a)} \quad \text{und} \quad M = \frac{U_{2,leer}}{\omega \cdot I_{1,leer}} \tag{10b}$$

Für den sekundärseitigen Kurzschluss (*$U_2 = 0$*) folgt aus (5b) in gleicher Weise

$$L_2 = \frac{I_{1,kurz} \cdot M}{I_{2,kurz}} = \frac{I_{1,kurz} \cdot U_{2,leer}}{\omega \cdot I_{2,kurz} \cdot I_{1,leer}} \tag{10c}$$

3. Die Leistung am idealen Transformator

Aus dem Gleichstromkreis ist bekannt, dass die Leistung P an einem Zweipol durch die Beziehung $P = U \cdot I$ gegeben ist. Im Wechselstromkreis bei harmonischem Verlauf von $U = U_0 \sin \omega t$ und $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$ hängt die Wirkleistung zusätzlich von der Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom (siehe Anhang) ab.

$$P = \frac{1}{2} U_0\, I_0 \cos\varphi = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi \tag{11}$$

Die Phasenverschiebung φ lässt sich mit Kenntnis der Impedanz Z eines Zweipols als

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)}\right) \tag{12}$$

berechnen, so dass in der Impedanz Z_1 der Primärspule aus (5) und (8b)

$$Z_1 = \frac{\vec{U_1}}{\vec{I_1}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2}, \qquad (13)$$

sowohl im Leerlauf ($R \Rightarrow \infty$) als auch im sekundärseitigen Kurzschluss ($R \Rightarrow 0$) der Realteil verschwindet und Strom und Spannung im Primärkreis mit $\varphi = 90^o$ phasenverschoben sind (siehe Anhang). Für alle anderen Werte eines ohmschen Widerstands R auf der Sekundärseite des Transformators ist der Realteil von Z verschieden von Null,

$$\mathrm{Re}(Z_1) = \frac{R\,\omega^2 L_1 L_2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} \quad , \qquad (14)$$

und damit $\varphi < 90^o$ so dass im Primärkreis eine Wirkleistung > 0 entspr. Gleichung (11) aufgebracht wird.
Andererseits kann man über diese Transformation eines Ohmschen Widerstandes R auf der Sekundärseite eines Transformators in einen Widerstand $R_1 = \mathrm{Re}(Z_1)$ auf der Primärseite eines Transformators mit Hilfe eines Transformators Widerstände durch Veränderung der Induktivitäten - also durch Veränderung des Windungszahlverhältnisse - vergrößern oder verkleinern.

4. Der reale Transformator

Bei einem realen Transformator sind neben den induktiven Widerständen der Spulen auch deren ohmsche Widerstände zu berücksichtigen. Neben diesen ohmschen Widerständen sind auch die im Trafokern selbst induzierten Spannungen zu beachten, die über den ohmschen Widerstand des Kernmaterials zu Wirbelströmen führen. Weiterhin führt auch die ständige Ummagnetisierung des Kerns zu Verlusten, die Permeabilität des Kerns ist nicht unabhängig vom Primärstrom, Sättigungseffekte im Kern können dazu führen, dass die Induktivitäten nicht konstant sind und die Annahme, dass der magnetische Fluss Φ beide Spulen verlustfrei durchsetzt, ist so nicht haltbar. Eine ausführliche und exakte Beschreibung sprengt den Rahmen des Versuchs.
Die für den idealen Transformator gemachte Annahme $M = \sqrt{L_1 L_2}$ (vollständige symmetrische Kopplung), wird unter Einführung des Koppelfaktors k korrigiert zu

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 L_2} < \sqrt{L_1 L_2}\,. \qquad (17)$$

Dieser Koppelfaktor spiegelt sich auch bei der Messung eines kleineren Übersetzungsverhältnisses wider

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| = k \cdot \frac{n_2}{n_1}\,, \qquad (18)$$

Auch ein Luftspalt im Trafokern führt zu einer Verringerung des Koppelfaktors. Jedoch die einfache Vorstellung, dass an der Stelle des Luftspalts ein besonders starker Streufluss auftritt und dadurch die Kopplung verringert, ist nicht zutreffend. Verantwortlich für den verringerten Koppelfaktor ist in diesem Fall die verringerte Induktivität der Anordnung.
Diese Verluste führen dazu, dass schon im Leerlauf beim realen Transformator eine Phasenverschiebung zwischen Primärstrom und Primärspannung $\varphi < 90^o$ auftritt, mit der sich die Leerlaufverlustleistung P_V mit

$$P_V = U_{1-eff}\; I_{1-eff} \cos\varphi \qquad (19)$$

bestimmen lässt.

Anhang:

A) Leistung im Wechselstromkreis

Im Wechselstromkreis müssen der Strom durch ein und die Spannung über einem Bauteil/Gerät (oder physikalisch besser Zweipol) nicht notwendig in Phase sein. Soll jedoch durch eine mit Wechselstrom betriebene Maschine Arbeit verrichtet werden, so ist die mittlere abgegebene Leistung entscheidend:

$$P = \overline{P(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt \tag{A1}$$

Bei einem harmonischen Spannungsverlauf mit der Kreisfrequenz ω und der Phasen-verschiebung φ zwischen Strom und Spannung ergibt sich

$$P = \overline{P(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \sin(\omega t) \cdot I_0 \sin(\omega t - \varphi)dt \tag{A2}$$

Mit

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin a \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad ,$$

$$\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{T}{2} \text{ und } \int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt = 0$$

wird

$$P = \overline{P(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \sin(\omega t) \cdot I_0(\sin(\omega t)\cos\varphi - \cos(\omega t)\sin\varphi)dt$$

$$= \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T (\sin^2(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi)dt$$

$$P = \frac{U_0 I_0}{2} \cos\varphi = U_{eff}\ I_{eff}\ \cos\varphi, \tag{A3}$$

was zur Definition von effektiver Spannung $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$ (A4)

und effektiver Stromstärke $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$ (A5)

führt. Damit ist die Wirkleistung $P = U_{eff}\ I_{eff}\ \cos\varphi$ (A6)

B) Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung am Beispiel

Als anschauliches Beispiel betrachten wir eine Reihenschaltung aus Spule und Widerstand, an die eine Spannungsquelle mit der harmonischen Wechselspannung U angelegt wird.

Der Maschensatz liefert $U = I \cdot R + L \cdot \frac{dI}{dt}$ (B1)

und mit dem komplexen Ansatz $U = U_0 e^{j\omega t}, \quad I = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (j^2 = -1)$ (B2)

mit der Phasenverschiebung φ folgt $U = U_0 e^{j\omega t} = (R + j\omega L) I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} = (R + j\omega L) I$ (B3)

Definiert man die Impedanz Z

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi} = \frac{U_0}{I_0}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + j\omega L \ , \tag{B4}$$

lässt sich die Phasenverschiebung φ berechnen:

$$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)} \tag{B5}$$

In diesem Beispiel wird mit verschwindendem R $\varphi = \pi/2$**,** der Strom eilt also der Spannung um $\pi/2$ hinterher. Diese Darstellung bewährt sich bei beliebigen Schaltungen mit zwei Anschlüssen (Zweipol) aus Spulen, Widerständen und Kondensatoren. Über die Berechnung des komplexen Widerstandes Z dieser Anordnung kann sofort auf die Phasenverschiebung zwischen Spannung über und Strom durch diesen Zweipol mit dem komplexen Widerstand Z geschlossen werden.

Versuch

1. Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie den Koppelfaktor k des Transformators bei einer Luftspaltbreite $s = (2*1{,}4)$mm !

2. Bestimmen Sie die Werte der Selbstinduktion L_1, L_2 und der Gegeninduktivität M bei der Primärspannung $U_1 = 20V$ bei einer Luftspaltbreite $s = 2*1{,}4mm$ $(n_1:n_2=500:250)!$

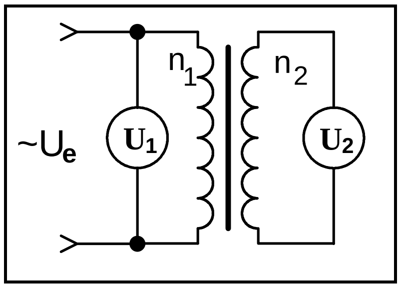
3. Bestimmen Sie die Leerlauf-Verlustleistung des Transformators bei der Primärspannung $U_1 = 20V$ bei einer Luftspaltbreite $s = 2*1{,}4mm$ $(n_1:n_2=500:250)$ durch Messung von Leerlaufstrom und -spannung und der Phasenverschiebung zwischen Leerlaufstrom und -spannung. Um welchen Winkel $d\varphi$ weicht der im Leerlauf gemessene Phasenwinkel φ vom Phasenwinkel bei einem idealen Transformator ab?

Zusatzaufgabe

4. Bei der Primärspannung U_1 = 20V und dem Luftspalt s = 2*1,4mm soll durch einen Widerstand R im Sekundärkreis die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung im Primärkreis minimal werden. Bestimmen Sie diese minimale Phasenverschiebung und ermitteln Sie den Wert des Widerstandes R!

2. Hinweise zur Versuchsdurchführung

1. Messen Sie die Sekundärspannung U_2 als Funktion der Primärspannung U_1 im Leerlauf bei der oben angegebenen Luftspaltbreite bei den Windungszahlverhältnissen $n_1 : n_2 = 500{:}250$ und $n_1 : n_2 = 250{:}500$. Stellen Sie $U_2 = f(U_1)$ grafisch dar und bestimmen Sie daraus die Koppelfaktoren k_1 (Primärseite: $n_1=500$, Sekundärseite: $n_2=250$; $0 \le U_1 \le 20V$) und k_2 (Primärseite: $n_1=250$, Sekundärseite: $n_2=500$; U_1 so einstellen, dass der Primärstrom $I_1<1{,}5A$) des Transformators. Geben Sie $(k \pm \Delta k)(s = (2 * 1.4)mm)$ des Transformators an. Welche Aussagen können Sie zum Wert der Gegeninduktivität M machen, wenn sie Primär und Sekundärseite tauschen?



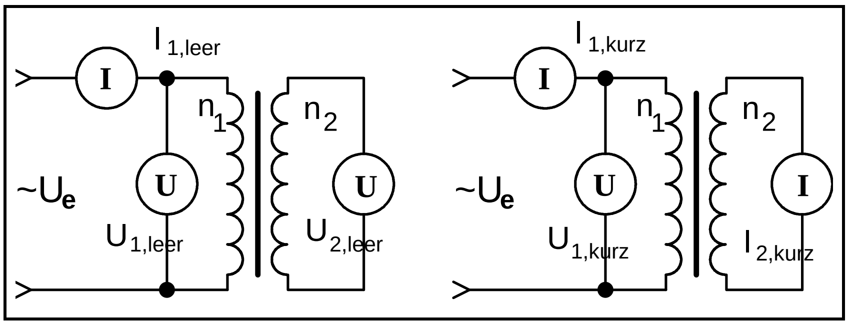
Schaltung 1 zur Bestimmung der Koppelfaktoren

2. Bei den angegebenen Werten für die Primärspannung und den Luftspalt messen Sie $I_{1,leer}$, $U_{1,leer}$, $U_{2,leer}$, $I_{1,kurz}$ und $I_{2,kurz}$ und berechnen damit $(L_1 \pm \Delta L_1), (L_2 \pm \Delta L_2)$, $(M \pm \Delta M)$ (Primärwindungszahl: $n_1=500$, Sekundärwindungszahl: $n_2=250$), wobei

$$L_1 = \frac{U_{1,leer}}{\omega \cdot I_{1,leer}} \quad ,$$

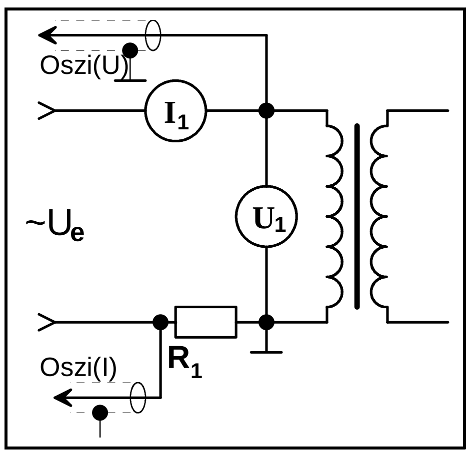
$$L_2 = \frac{I_{1,kurz} \cdot U_{2,leer}}{\omega \cdot I_{2,kurz} \cdot I_{1,leer}} \quad ,$$

$$M = \frac{U_{2,leer}}{\omega \cdot I_{1,leer}} \quad .$$



Schaltung 2 zur Bestimmung der Induktivitäten

3. Messen Sie mit der angegebenen Schaltung bei konstanter Primärspannung (U_1 = 20V) den Primärstrom (I_1) des Transformators und die Phasenverschiebung φ zwischen Primärstrom und Primärspannung durch oszilloskopische Messung bei Leerlauf im Sekundärkreis. Eine genaue Messung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ist mit einem Zweistrahloszilloskop möglich. Als Bezugspotential wählt man einen Abgriff der Transformatorprimärspule, womit der Messpunkt Primärspannung (Oszi(U)) festgelegt ist. Da man mit dem Oszilloskop Ströme nicht direkt messen kann, wird hier die Spannung über dem Widerstand R_1 gemessen (Oszi(I)), die in Phase zum Strom durch die Primärwicklung des Transformators sein muss. In der Schaltung 3 ist jedoch zusätzlich die Stromrichtung zu beachten, so dass am Oszilloskop derjenige Signaleingang, der zur



Schaltung 3 zur Bestimmung der Phasenverschiebung bei Leerlauf am Transformator

Strommessung verwendet wird, auf invertierenden Betrieb zu schalten ist. Aus der am Oszilloskop zu erwartenden Darstellung (s. Abb. A1) lässt sich die Phasenverschiebung $\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^o$ berechnen.

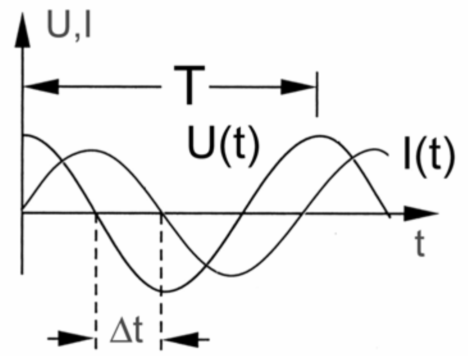


Abb. A1: Am Zweikanal-Oszilloskop zu erwartende Darstellung

Fragen zum Versuch

1) Erläutern Sie das Induktionsgesetz und die Lentzsche Regel.

2) Wie verläuft der Induktionsfluss im Transformatorkern und wodurch wird er hervorgerufen? Wie beeinflusst ein Luftspalt den Induktionsfluss?

3) Was sind Selbstinduktion und Gegeninduktivität?

4) Was versteht man unter dem Übersetzungsverhältnis eines Transformators? Wie können große Spannungen und wie große Ströme erzeugt werden?

5) Was sind Wirbelströme?

6) Wie kann man Wechselspannungen, Wechselströme und Phasenverschiebungen messen?

7) Welche Ursachen haben Verluste am Transformator?

Literatur

Becker/Jodel	Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure
Demtröder	Experimentalphysik 2
Bergmann/Schäfer	Experimentalphysik Band II, Elektrizität und Magnetismus
Recknagel	Physik Band II, Elektrizitätslehre
Gehrtsen	Physik