Das Geschenkproblem

Assad Majid*, Apostolos Sideris*, Philipp L. Strietzel*

23.12.2019

Das Geschenkproblem in der von uns formulierten Form ist die weihnachtliche Variante einer als "secretary problem"[1] oder "best choice problem" bekannten mathematischen Fragestellung (vgl. [1, Kapitel 5, Beispiel 5.13]). Ziel ist es aus n Bewerbern für einen Job den Optimalen auszuwählen. Dabei kann man genau einschätzen wie gut ein Bewerber ist, muss aber direkt nach dem Bewerbungsgespräch entscheiden, ob man eine Zu- oder Absage erteilt.

Die optimale Strategie

Die optimale Strategie ist, wie im Video beschrieben, gegeben durch:

1. Begutachte die ersten r Bewerber, dabei ist $1 \leq r \leq n-1$.
2. Bestimme das Maximum (im Sinne des besten Kandidaten) aus diesen r Bewerbern.
3. Begutachte so lange die weiteren Bewerber, bis einer besser ist, als das zuvor ausgemachte Maximum.

Die Frage, die sich stellt ist, wie groß man r in Abhängigkeit von n wählt. Mathematisch lässt sich die Wahrscheinlichkeit $p(r)$ den optimalen Bewerber zu finden, gegeben, dass man sich die ersten r anschaut, ausrechnen als

$$\begin{aligned} p(r) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\text{Bew. } i \text{ wird gewählt und Bew. } i \text{ ist der Beste}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\text{Bew. } i \text{ wird gewählt} \mid \text{Bew. } i \text{ ist der Beste}\right) \mathbb{P}\left(\text{Bew. } i \text{ ist der Beste}\right). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet " | " - "unter der Bedingung, dass". Die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat i der Beste ist, ist bei n Kandidaten offenbar $\frac{1}{n}$. Falls der beste Kandidat unter den ersten

*Technische Universität Dresden, Institut für Mathematische Stochastik, 01062 Dresden, Germany, e-mails: assad.majid@tu-dresden.de, apostolos.sideris@tu-dresden.de, philipp.strietzel@tu-dresden.de

[1] Vgl. [2].

r Kandidaten war, so ist die Wahrscheinlichkeit ihn auszuwählen 0. Aus diesen Gründen folgt

$$p(r) = \left(\sum_{i=1}^{r} 0 + \sum_{i=r+1}^{n} \mathbb{P} \left(\begin{array}{c} \text{der Beste der ersten} \\ i-1 \text{ Bewerbern ist unter} \\ \text{den ersten } r \text{ Bewerbern} \end{array} \middle| \text{ Bew. } i \text{ ist der Beste} \right) \right) \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \left(\sum_{i=r+1}^{n} \frac{r-1}{i-1} \right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n} \sum_{i=r+1}^{n} \frac{1}{i-1}.$$

Damit gilt näherungsweise für eine große Anzahl von Kandidaten (d.h. $n \nearrow \infty$)

$$p(r) \approx \frac{1}{n} \cdot r \cdot (\ln n - \ln r)$$

und wir können das Maximum wie üblich mit Hilfe der ersten Ableitung bestimmen:

$$p'(r) = \frac{1}{n} (\ln n - \ln r - 1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = \frac{n}{e},$$

wobei $e \approx 2,7182$ die Eulersche Zahl bezeichnet. Da für die zweite Ableitung $p''\left(\frac{n}{e}\right) = -\frac{1}{n\frac{n}{e}} < 0$ gilt, maximiert $r = \frac{n}{e}$ die Wahrscheinlichkeit $p(r)$.

Die resultierende Trefferwahrscheinlichkeit

Setzen wir nun $r = \frac{n}{e}$ in unsere Wahrscheinlichkeitsfunktion ein, erhalten wir

$$p\left(\frac{n}{e}\right) \approx \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{e} \left(\ln n - \ln \frac{n}{e}\right) = \frac{1}{e} (\ln n - \ln n + \ln e) = \frac{1}{e} \cdot 1 \approx 0.37,$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit den optimalen Kandidaten auszuwählen beträgt etwa 37%, wenn wir die ersten n/e Kandidaten begutachten ohne einen auszuwählen. Die doppelte Bedeutung des Faktors $\frac{1}{e}$, einerseits als Anteil der zu begutachtenden Kandidaten und andererseits als Trefferwahrscheinlichkeit, ist auch der Grund für die Namensgebung der Strategie.

Bei den 14 Geschäften für potentielle Schokoladenweihnachtsmänner ergibt sich also die optimale Zahl r durch $r = \frac{1}{e} \cdot 14 \approx 5$. Im Video gehen wir aus diesem Grund in die ersten fünf Geschäfte und merken uns lediglich die Größe des Größten Schokoweihnachtsmannes. Dies ist dann unser Referenzwert. Sobald man dann in einem späteren Geschäft einen größeren Weihnachtsmann sieht, kauft man diesen und maximiert damit die Wahrscheinlichkeit tatsächlich den größten Weihnachtsmann in Dresden gefunden zu haben.

Literatur

[1] Schilling, R. L. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* de Gruyter Studium, 2017.

[2] Wikipedia contributors. Secretary problem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Secretary_problem&oldid=930418528`, 2019. [Online; accessed 17-December-2019].