

Das Simplex-Verfahren

Wir nehmen an, dass ein Simplex-Tableau der folgenden Gestalt vorliegt.

$$\begin{array}{c|c|c} & x_N^\top & 1 \\ \hline x_B = & P & p \\ \hline z = & q^\top & q_0 \end{array}$$

Mit x_N werden dabei die Nichtbasisvariablen, mit x_B die Basisvariablen bezeichnet. Das Tableau heißt **primal zulässig**, falls alle Einträge des Vektors p nichtnegativ sind.

Entscheidbares oder nicht entscheidbares Tableau?

Ein primal zulässiges Simplex-Tableau heißt **entscheidbar**, falls einer der folgenden Fälle eintritt:

- Die Zielfunktionskoeffizienten, also die Einträge des Vektors q^\top , sind alle ≥ 0 . In diesem Fall ist eine optimale Lösung gefunden. Sie lautet $x_B = p$ und $x_N = 0$.
- Es gibt eine Spalte, in welcher der Eintrag von q negativ ist, die darüber liegenden Einträge der Matrix P jedoch alle ≥ 0 sind. In diesem Fall ist das Problem nicht lösbar, da die Zielfunktion auf dem zulässigen Bereich nach unten unbeschränkt ist.

Liegt keiner der obigen Fälle vor, dann heißt das Tableau **nicht entscheidbar** und es ist ein Austausch durchzuführen.

Wie wird das Pivotelement ausgewählt?

Man geht nach folgenden Schritten vor:

- Wähle eine Spalte mit negativem Zielfunktionskoeffizienten. Das ist dann die Pivotspalte.
- Bilde für die negativen Einträge der Pivotspalte (und nur für diese!) folgende Quotienten:

$$-\frac{\text{Eintrag auf der rechten Seite}}{\text{Eintrag in der Pivotspalte}}$$

(Beachte, dass die Quotienten selbst durch das negative Vorzeichen dann wieder positiv sind.)

- Wähle eine Zeile aus, in der der Quotient am kleinsten ist. Das ist die Pivotzeile.

Der Eintrag, in dem sich Pivotspalte und Pivotzeile kreuzen, ist das Pivotelement.

Wie erzeugt man das neue Tableau?

Zunächst wird an das alte Tableau eine Kellerzeile angefügt. Diese hat in der Spalte, in der das Pivotelement steht, einen * stehen. Alle anderen Einträge berechnen sich wie folgt:

$$\text{Kellerzeile} = -\frac{\text{Pivotzeile}}{\text{Pivotelement}}.$$

Danach geht man wie folgt vor:

- An der Stelle, wo das Pivotelement stand, steht jetzt

$$\text{neuer Eintrag} = \frac{1}{\text{altes Pivotelement}}.$$

- Die Spalte, die Pivotspalte war, berechnet sich gemäß

$$\text{neue Einträge} = \frac{\text{alte Pivotspalte}}{\text{altes Pivotelement}}.$$

- Die Zeile, die Pivotzeile war, ist gleich der alten Kellerzeile.
- Alle anderen Einträge berechnen sich nach der folgenden Formel:

$$\text{neuer Eintrag} = \text{alter Eintrag} + \text{Eintrag der alten Pivotspalte} * \text{Eintrag der alten Kellerzeile}.$$